

Chapitre n° 5: Vecteurs, droites et plans de l'espace

Terminale, spécialité mathématique, 2020-2021

1 Vecteurs

Définition 1 (vecteur, hors programme)

On appelle **espace vectoriel réel** un ensemble E dont les éléments sont appelés **vecteurs** et muni de deux opérations :

- ★ une addition (entre vecteurs) commutative, associative, d'élément neutre $\vec{0}$ (le vecteur nul), et pour laquelle chaque vecteur \vec{u} possède un opposé (c'est-à-dire un vecteur avec qui l'addition donne le neutre, et on note ce vecteur $-\vec{u}$). On note $+$ cette addition, mais elle n'a rien à voir avec l'addition entre réels.
- ★ une multiplication scalaire (c'est-à-dire entre un nombre réel et un vecteur, noté par un vide, un blanc) telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$,

$$\textcircled{1} (\lambda \times \mu) \vec{u} = \lambda (\mu \vec{u}) \quad \textcircled{2} (\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u} \quad \textcircled{3} \lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} \quad \textcircled{4} 1 \vec{u} = \vec{u}$$

Les espaces vectoriels ainsi définis forment une famille plus général que l'espace tel que nos sens conçoivent celui dans lequel nous vivons (intuition qui s'avère fausse depuis Einstein, mais tout autant que le formalisme précédent d'espace vectoriel) :

Définition 2 (vecteur, au programme)

Les points A et B étant distincts, le vecteur \overrightarrow{AB} est caractérisé par sa **direction**, celle de la droite (AB), par son **sens**, de A vers B, et par sa **norme**, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui est la longueur AB.

Définition 3 (combinaison linéaire)

Une **combinaison linéaire** d'une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ d'un espace vectoriel E est un vecteur de la forme $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** si l'un est multiple de l'autre ($\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$) ou encore s'il existe une combinaison linéaire nulle $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$ avec α, β non tous nuls.

Trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** si l'un est combinaison linéaire des autres (par exemple $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$) ou encore s'il existe une combinaison linéaire nulle $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$ avec α, β, γ non tous nuls.

De manière générale, une famille de vecteurs est dite **liée** ou **linéairement dépendante** s'il existe une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs, avec des coefficients non tous nuls.

Définition 4 (translation, addition vectorielle)

Un ensemble \mathcal{E} est un espace affine, dont les éléments sont appelés des points, lorsqu'un espace vectoriel E agit sur \mathcal{E} par translation :

- ★ étant donnés deux points A, B de \mathcal{E} , il existe un unique vecteur \vec{u} tel que B soit l'image de A par la **translation** de vecteur \vec{u} . On note $\vec{AB} = \vec{u}$ et on dit que la flèche droite allant de A vers B est **un représentant** du vecteur \vec{u} .
- ★ L'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtient par **deux translations successives** de vecteur \vec{u} puis \vec{v} .
- ★ La translation de vecteur nul préserve chacun des points de l'espace.

Exemple 1. Le **plan** réel, dans lequel on a l'habitude de travailler, est un espace affine dont l'espace vectoriel associé vérifie :

- ★ Étant donné un vecteur \vec{u} , il en existe un autre \vec{v} tel que \vec{u} et \vec{v} ne soient pas colinéaires.
- ★ Trois vecteurs quelconques sont toujours coplanaires.

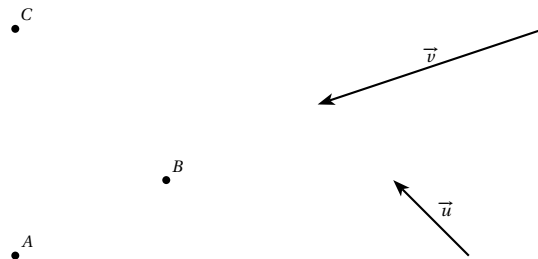
Propriété 5 (Relation de Chasles)

Soient trois points A, B et C d'un espace affine \mathcal{E} : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Preuve. Par définition, C est à la fois l'image de A par la translation de vecteur \vec{AC} et par celle de vecteur $\vec{AB} + \vec{BC}$. Par unicité, on obtient le résultat.

Exemple 2. Représenter :

- ★ l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$
- ★ l'image de B par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{AB}$
- ★ un représentant de $-\vec{u}$
- ★ un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$.
- ★ G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$.



2 L'espace à trois dimensions

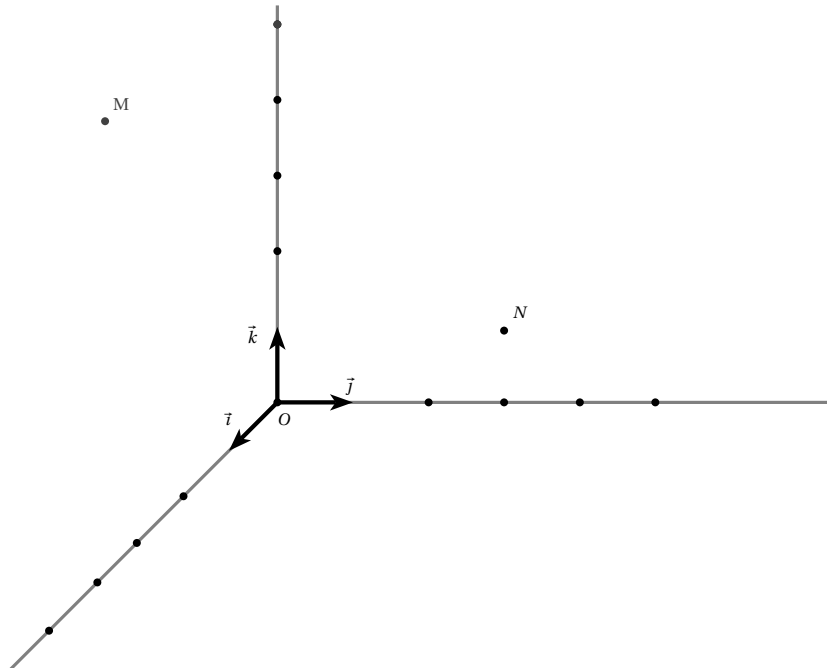
Définition 6

L'**espace** réel est un espace affine dont l'espace vectoriel associé vérifie :

- ★ Étant donnés deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} , il en existe un autre \vec{w} tel que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} ne soient pas coplanaires.
- ★ Quatre vecteurs quelconques sont toujours liés.

Remarque 1. Le premier point de la définition 6 assure qu'il existe trois vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} non coplanaires. La donnée d'un point de l'espace O et de trois vecteurs non coplanaires définit un **repère de l'espace**. Si $A \in \mathcal{E}$, le second point de la définition 6 assure qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les nombres x, y, z sont les coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote).

Exemple 3. Placer $P(1;2;3)$. Déterminer les coordonnées de M sachant que $z_M = 3$ et celles de N sachant que $x_N = 0$. Déterminer les coordonnées de Q tel que $PQNM$ soit un parallélogramme.

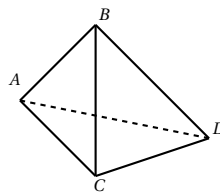


Théorème 7

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- ★ Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ★ Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x', y + y', z + z')$.
- ★ Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $\lambda \vec{u}$ sont $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- ★ Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2})$.
- ★ Si le repère est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- ★ Si le repère est orthonormé et $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple 4. L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Montrer que les segments qui joignent les arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent en leurs milieux. (Exprimer les coordonnées des milieux de ces segments en fonctions de celles des sommets)



3 Droites de l'espace

Définition 8 (droite, vecteur directeur)

Étant donnés deux points distincts A et B de l'espace, la **droite** (AB) est l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} soient colinéaires, c'est-à-dire tels qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$.

Un vecteur non nul colinéaire à \overrightarrow{AB} est un **vecteur directeur** de la droite (AB) .

Deux droites ayant des vecteurs directeurs colinéaires sont dites **parallèles**.

Remarque 2. En physique moderne (enfin depuis 1915 et la révolution de la relativité générale), une ligne droite est, comme l'avait déjà dit Newton, la trajectoire suivie par un corps soumis à aucune force, mais ce qui change, c'est que la gravité n'est plus une force, c'est une déformation de l'espace (qui est désormais l'espace-temps). La Terre n'est

soumis à aucune force et la trajectoire qu'elle suit (en première approximation une ellipse **dans** l'espace vectoriel euclidien ou espace plat) est une ligne droite **dans** l'espace-temps de la relativité générale.

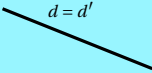
Propriété 9

- ① Si $C, D \in (AB)$ distincts, alors $(AB) = (CD)$.
- ② Par un point passe une unique parallèle à une droite donnée. (même vecteur directeur)
- ③ Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

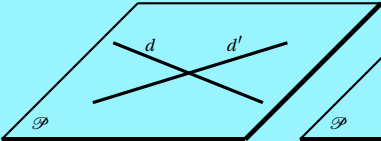
Preuve. ① : comme $C, D \in (AB)$, il existe des réels t, t' tels que $\overrightarrow{AC} = t \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = t' \overrightarrow{AB}$.
Donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = (t' - t) \overrightarrow{AB}$ (1).
Or tout point M de (CD) vérifie $\overrightarrow{CM} = k \overrightarrow{CD}$ soit $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = k(t' - t) \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AM} = (t + k(t' - t)) \overrightarrow{AB}$ donc $M \in (AB)$.
On a ainsi démontré $(CD) \subset (AB)$ (2).
Mais comme \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires par (1), et \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires par (2), on en déduit que \overrightarrow{CA} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires, donc $A \in (CD)$ (et de même $B \in (CD)$).
Le même raisonnement donne $(AB) \subset (CD)$ d'où $(AB) = (CD)$.
② : l'unique parallèle à d , de vecteur directeur \vec{u} , passant par A est la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .
③ : les vecteurs directeurs des trois droites sont colinéaires.

Propriété 10 (Position relative de deux droites)

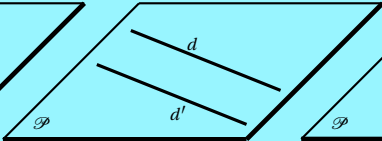
Deux droites de l'espace d et d' sont dans une et une seule des quatre situations suivantes :



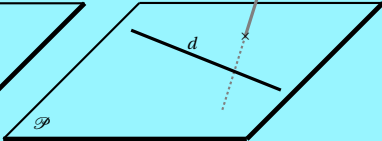
(a) : $d = d'$
parallèles, coplanaires.



(b) : d et d' **sécantes**
 d, d' coplanaires.



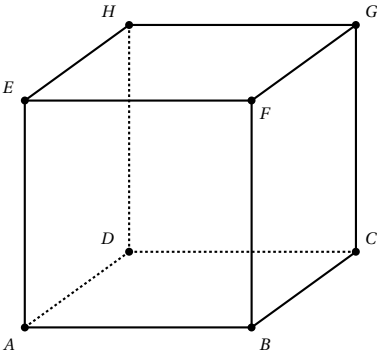
(c) : d et d' **parallèles strictes**
 d, d' coplanaires.



(d) : d et d' non coplanaires
 $\triangle d$ et d' ni sécantes, ni parallèles

Preuve. Si d et d' ont au moins deux points d'intersection, elles sont confondues (a), si elles n'en n'ont qu'un, elles sont sécantes (b), si elles n'en n'ont aucun, soit elles sont parallèles (c), soit leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires (d).

Exemple 5. $ABCDEFGH$ est un cube. Citer des couples de droites illustrant la propriété 10 et prouver ces affirmations.



Définition 11 (segmnet)

Étant donnés deux points distincts de l'espace, le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0; 1]$.

Exemple 6. Dans l'exemple 5, calculer la longueur du segment $[AG]$

Retrouver ce résultat en travaillant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

4 Système d'équations paramétriques d'une droite

Définition 12 (Système d'équations paramétriques d'une droite)

Par définition, M appartient à une droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \vec{u}$. Si l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et $M(x; y; z)$, cela équivaut à

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t z_{\vec{u}} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

Méthode 1. Trouver des équations paramétriques

Il suffit de connaître un point A et un vecteur directeur \vec{u} : pour une droite (AB) , $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ convient, pour une droite d parallèle à d' passant par A , tout vecteur directeur de d' convient.

Exemple 7. Dans l'exemple 5, on considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$. Déterminer un système d'équations paramétrique de (BH) , puis de la parallèle d à (BH) passant par G .

Méthode 2. Trouver des points ou un vecteur directeur à partir des équations paramétriques

Pour trouver un point à partir du système d'équations paramétriques, il suffit de choisir une valeur du paramètre ($t = 0$ ou $t = 1 \dots$) et de calculer les coordonnées x, y, z du point.

Les coordonnées d'un vecteur directeur sont les coefficients du paramètre t dans un système d'équations paramétriques.

Exemple 8. Trouver deux points et un vecteur directeur de d :
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 + 2t \\ z = -t \end{cases}.$$

Méthode 3. Vérifier qu'un point appartient à une droite à partir des équations paramétriques.

Il suffit de résoudre un système de trois équations à une inconnue. La première équation donne une valeur du paramètre t qui doit également vérifier les deux autres équations.

Exemple 9. Dire si $A(-3; 2; -1)$ et $B(-3; 0; 4)$ appartiennent à la droite d de l'exemple 8.

Méthode 4. Déterminer la position relative de deux droites.

Si les droites n'ont pas des vecteurs directeurs colinéaires, elles sont sécantes ou non coplanaires : un point $M(x; y; z)$ appartient à l'intersection de deux droites d et d' , si ses coordonnées vérifient les deux systèmes. Cela revient à résoudre un système de trois équations à deux inconnues. On obtient l'intersection (ou un système impossible pour des droites non coplanaires).

⚠ On doit choisir des noms différents pour les deux paramètres (t et t' par exemple).

Exemple 10. Position relative de d (exemple 8) et (MN) où $M(3; 0; 3)$ et $N(0; 3; 1)$?

5 Plans de l'espace

Définition 13 (Plan, direction)

Étant donnés trois points non alignés A, B et C de l'espace, le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} soient coplanaires, c'est-à-dire tels qu'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$.

Deux vecteurs non coplanaires formés avec des points de (ABC) forment une **direction** du plan (ABC) .

Deux plans confondus ou sans point commun sont dits **parallèles**.

Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite contenue dans le plan.

Propriété 14

- ① Si E, F, G sont non alignés et dans un plan (ABC) , alors $(ABC) = (EFG)$.
- ② Si A et B sont deux points distincts d'un plan \mathcal{P} , la droite (AB) est contenue dans \mathcal{P} .
- ③ Une droite parallèle à un plan est soit contenue dans le plan, soit à l'extérieur du plan.

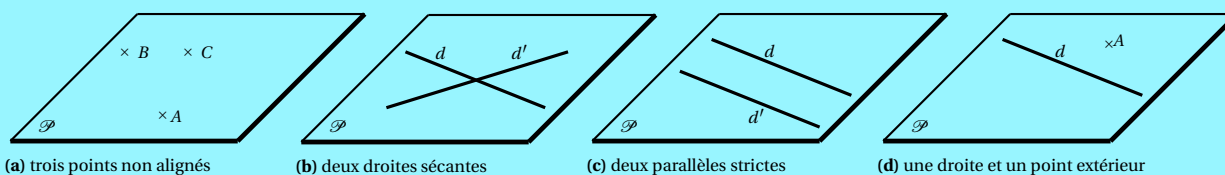
Preuve. ① : même type de démonstration que la propriété 9 ①.

② : si $A, B \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = (ABC)$ où C est dans \mathcal{P} et non aligné avec A et B . Ainsi, les points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ décrivent (AB) et sont dans \mathcal{P} .

③ : Si $d \parallel \mathcal{P}$ et d rencontre \mathcal{P} en A , un vecteur directeur de d est un vecteur de \mathcal{P} donc $d \subset \mathcal{P}$.

Propriété 15 (Caractérisation d'un plan)

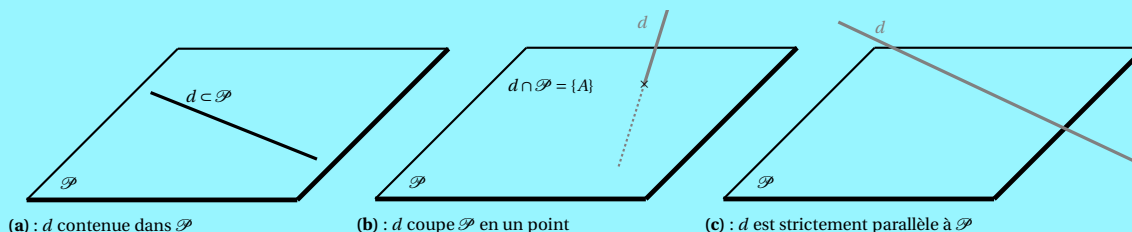
Il existe un unique plan \mathcal{P} contenant :



Preuve. Dans chaque cas, on peut trouver trois points non alignés et utiliser la propriété 14.

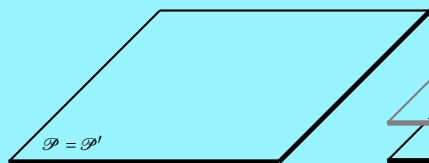
Propriété 16 (Position relative d'une droite et d'un plan)

Une droite d et un plan \mathcal{P} sont dans une et une seule des situations suivantes :

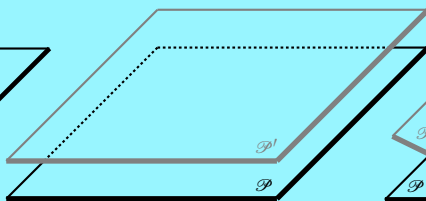


Preuve. Les situations possibles sont : $\mathcal{P} \cap d$ compte au moins 2, exactement 1, ou 0 points.

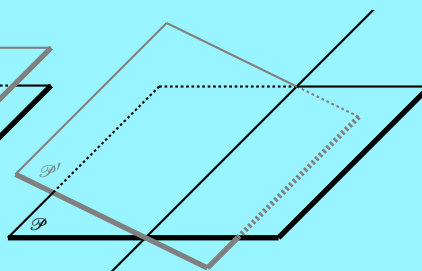
Deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont dans une et une seule de ces situations :



(a) : \mathcal{P} et \mathcal{P}' confondus



(b) : \mathcal{P} et \mathcal{P}' strictement parallèles



(c) : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \text{une droite}$

Preuve. Montrons que $\{A\} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est impossible. Soit d une droite de \mathcal{P} qui ne passe pas par A : si elle coupe \mathcal{P}' en B , la droite (AB) est contenue dans les deux plans. Sinon, d est parallèle à \mathcal{P}' de sorte que la droite parallèle à d passant par A est contenue dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

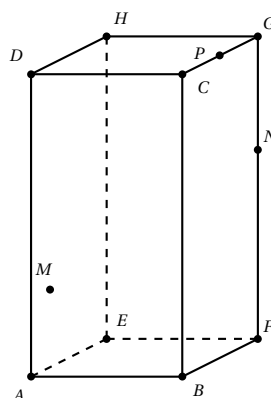
6 Solides

6.1 Section plane d'un solide

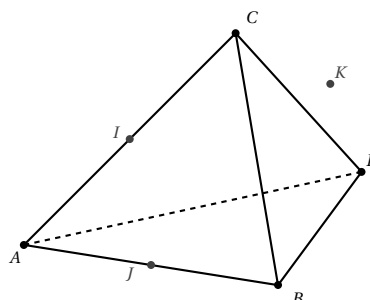
Méthode 5. Pour déterminer l'intersection d'un **polyèdre** (solide composé de plusieurs faces) et d'un plan, on procède face par face en

- ① cherchant deux points communs entre le plan de coupe et le plan contenant la face étudiée.
Pour cela, on prolongera parfois les arêtes de la face étudiée et les droites d'intersection des faces étudiées auparavant. (exemples 11 et 12).
- ② cherchant un point commun entre la face étudiée et le plan de coupe, et en utilisant le théorème ??, si on connaît déjà l'intersection du plan de coupe avec une face parallèle à la face étudiée. (voir l'exemple 11).
- ③ cherchant un point commun entre la face étudiée et le plan de coupe, et en utilisant le théorème ??, si l'on sait que l'intersection du plan de coupe et d'une autre face est parallèle à une droite de la face étudiée. (voir l'exemple 12).

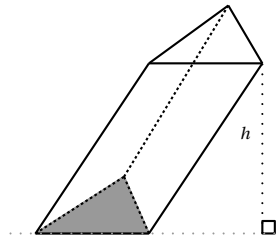
Exemple 11. Représenter la section du parallélépipède suivant par le plan (MNP) , sachant que $M \in (AED)$, $N \in [GF]$ et $P \in [CG]$. On justifiera soigneusement l'intersection de (MNP) avec la face $AEDH$.



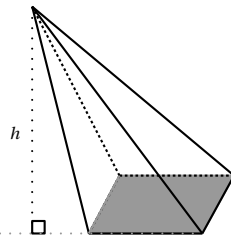
Exemple 12. Représenter l'intersection du tétraèdre avec le plan (IJK) , en justifiant soigneusement l'intersection de (IJK) avec la face (BCD) . Le point I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[AB]$, enfin $K \in (BCD)$:



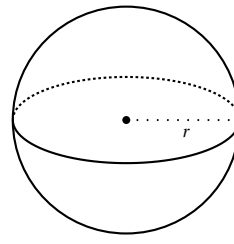
6.2 Volumes de solides



Prisme, cylindre : $V = B \times h$



Pyramide, cône : $V = \frac{1}{3}B \times h$



Sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$